



TITLE:

2次元粉体気体の乱流化とエネルギースペクトル (複雑流体の構造形成と崩壊の数理)

AUTHOR(S):

磯部, 雅晴

CITATION:

磯部, 雅晴. 2次元粉体気体の乱流化とエネルギースペクトル (複雑流体の構造形成と崩壊の数理). 数理解析研究所講究録 2005, 1413: 239-247

ISSUE DATE:

2005-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26222>

RIGHT:

2次元粉体気体の乱流化とエネルギースペクトル

名古屋工業大学工学研究科 礒部雅晴 (Masaharu Isobe)
Nagoya Institute of Technology

1 はじめに

1.1 背景

近年粉体の物理学では、粉体自身の運動の時間スケールに比べ外場（重力、振動板など）で特徴づけられる運動の時間スケールがはるかに小さい系（すなわち微小重力、高励起）に対し、非平衡統計物理学の伝統的手法を拡張した系統的な研究が展開され、ヨーロッパ、アメリカを中心に一大分野として確立されつつある。この分野は特に、粉体気体 (Granular Gas) と呼ばれており既に何冊かの本や系統的レビューも出版されている [1, 2]。

一般に粉体気体系は、境界条件や重力場の影響を大きく受けることが知られている。これらの影響を最大限排除した、「自由冷却過程の粉体気体」と呼ばれる系の研究が過去に多くなされた。この系は一般に、無重力周期境界条件下において、初期状態を熱平衡状態に設定し、粒子衝突の際に散逸を導入した（非弾性衝突）だけという非弾性剛体球 (Inelastic Hard Sphere: IHS) 系のことをさす。これは、粉体気体（そして一般の非平衡系）を考察するために、スピン系におけるイジングモデルや乱流研究における一様等方性乱流に相当するような最も単純なモデル系の一つと考えられ、いわば理想粉体気体系と呼べるものである。

この系は、反発係数 $e = 1$ （すなわち剛体球系）の熱平衡状態では、密度変化に対してよく知られたアルダー転移が起こるだけだが、（熱力学極限では）微小散逸を伴う準弾性極限でさえたちまち系が不安定化し、いくつかの時空スケールが出現する。一般に認知されている緩和のシナリオは、一様な冷却状態から速度場、密度場の順に空間不均一性（空間相関）が生じ不安定化（シアリング、クラスター化）を起こし、大局的にシステムサイズ全体に広がる最終アトラクター構造を形成して非平衡定常状態に落ち着く、もしくは局所的に数粒子のみ関与する非弾性コラプスをおこして破綻するというものである。

1.2 粉体気体の解析手法

これまでに粉体気体系は、ミクロ（分子動力学）、メソ（気体運動論）、マクロ（流体力学的方程式）の3つの階層構造から、局所非平衡な非平衡統計力学として輸送現象の関係式などの新たな一般的枠組みを構築する具体的対象としても研究されており揺動散逸定理や温度の概念の拡張といったことさえも議論されてきている。しかし、3つの階層構造に典型的とされる解析手法には、それぞれ長所と短所が存在し、決定的な解析手法は未だ存在していないように思われる。ここで、これらを以下に簡単にまとめる。

1. まず最も系統的に理論解析が行われている階層はメソスケール (Boltzmann 方程式) のアプローチだと思われる。Boltzmann 方程式では、分子カオスの仮定が成立する粉体気体の緩和の初期ステージ（一様冷却状態）でのみ解析の妥当性が保障されており、空間相関が顕著になるシアリングステージ以降のステージを議論することは困難である。また、そもそも密度に関しても平衡系で固相領域に対応する高密度領域は（現象論的に Enskog-Boltzmann 方程式やリング近似を考慮しても）適用範囲外である。

2. マクロスケールな解析手法においては、HaffやJenkins&Savageによる流体方程式の導出が有名である[1, 2]が、最近排除体積効果を圧力の増大として取り入れ、高密度になるクラスターを現象論的にモデル化した流体力学的方程式がMazenkoらのグループから提出され、最終状態までの直接数値シミュレーション(Direct Numerical Simulation:DNS)が系統的に行われた[3, 4]。しかし、DNSでは多くのパラメーターや仮定が導入されており、そもそも散逸を伴う現象論的流体方程式がどこまで成り立つかといった根本的な問題さえ抱えているように思われる。
3. ミクロスケールの分子動力学は、近似なしに厳密な解が求まる唯一の方法である。しかし、空間相関が顕著になるシアリングステージ以降では大規模計算が必要なため計算量が膨大となり、これまでの研究では粒子数が10万を越えると事実上最終アトラクター状態に到達するのが不可能に近くなる。ここ15年の高速アルゴリズムの開発とデータ構造の整備[5, 6]により、広範なパラメーター空間の最終状態まで到達できるようになったとはいえ熱力学極限の空間相関を議論するには十分とはいいがたい。

1.3 粉体気体と流体乱流

2次元非圧縮性ナビエーストークス(Navier-Stokes:NS)乱流は、粘性率ゼロの極限(すなわちオイラー流体)でエネルギーとエントロフィー(渦度の2乗)が保存量として存在し、自由減衰過程ではエントロフィーカスケードが起こる[7]。また、次元解析により発達した2次元乱流状態におけるエネルギースペクトルの指数は -3 となることがKraichnan, Bachelorらの理論により35年以上も前に予測されている[7]。

粉体系と流体乱流との関連を調べた研究は、極めて少ない。粉体と流体乱流の類似性を最初に指摘したのは田口による研究だと思われる[8]。この先駆的な研究では、2次元粉体振動層において数百粒子系シミュレーションにより、粒子変位のエネルギースペクトルを数値的に計算し、3次元乱流のKolmogorovスケーリング指数 $-5/3$ を見出している。しかし、そもそも2次元でなぜKolmogorovスケーリングが得られるのか?という点、振動という周期を持った外場により粒子を励起させる点、粒子数と統計量の問題、励起の仕方が強制乱流に近い点、速度ではなく粒子の変位のスペクトルを用いている点、重力による方向性の問題、解析の粗さなど多くの疑問点もあるように感ずる。その後、Pengと太田は、重力の方向性のないランジュバン型熱浴を設置した2次元粉体気体の非平衡定常状態におけるシミュレーションを実行し、系統的な空間スペクトルの解析を行った[9]。しかし、この研究も周期を導入して離散的に粒子を熱するといった点や、千粒子程度という統計量の不足などいくつか疑問点もあり、流体乱流のスペクトルとの定量的な類似点は見出されていないようである。ごく最近になって、RadjaiとRoux[10]が、2次元においてParrinello-Rahman型のシミュレーションセルを使い、準静的な領域での粉体系のスペクトルを調べている¹。しかし、観測される統計量は定量的には2次元乱流のスペクトル指数とは大きく異なり、定性的にはかろうじてべき分布を出している程度であること、システムサイズも数千粒子系であり統計性にも疑問が生じる。MDのモデル自体もよくわからないものであるし、Parrinello-Rahman型のシミュレーションセルを使うと、粉体特有のシア不安定性のため、たちまちセル自身が著しく引き伸ばされシミュレーションが破綻してしまうと予想される。逆に、そういう事実が準静的な領域でスペクトルを取った理由ではないかと思われる。

これらすべての研究はべき乗則に似た結果を提出している。しかし、2次元乱流特有のスケーリング指数を導出することには成功していない。その理由として、(1)粒子数が不十分のため統計誤差がとても大きい、(2)システムサイズが小さいため空間相関スケールと同程度、それ以下の

¹ 彼らは、この論文で粉体系における乱流現象をgranulanceという造語で銘打って発表しているが、既に田口らにより先駆的研究が行われているにも関わらずそれらを引用していない。

系で空間スペクトルを計算している、(3) 系統的なパラメーター空間サーベイが（特にレイノルズ数が大きくなる準弾性極限において）行われていないようだ、(4) 2次元流体乱流の特有のエンストロフィーカスケードの概念自体をあまり知られていないためそのような問題意識がなかった、ことなどがあげられると推測する。

1.4 ひとつの2次元粉体乱流モデル

我々の予備的研究では、最も単純な粉体モデルとして研究が行われている2次元 IHS モデルにおいても2次元乱流が発見され、NS 乱流と多くの定量的類似点があることが判明した [11, 12]。現在まで、粉体気体の空間相関に関する物理量の系統的研究は Ernst らのグループによる気体運動論による速度相関等の解析 [13] を除いてほとんどないと思われる。そこで本研究では、この2次元 IHS モデルにおいて発達した乱流状態に着目し、高レイノルズ数または気体運動論による解析が不可能な高密度系に焦点を絞って、初期ステージから最終アトラクター状態に至るまでの長時間かつ広範なパラメータ空間における乱流化とエネルギー&渦度スペクトル、コルモゴロフスケールなどの空間構造の形成やスケールリング則を系統的に調べた。

2 モデルと計算手法

2.1 2次元非弾性剛体球 (IHS) モデル

本研究で用いられる自由冷却過程の2次元 IHS モデルは、その単純さゆえ系がたった3つの無次元パラメーターだけで完全に特徴づけられる（反発係数 r 、全粒子数 N 、粒子占有率 ν ）。系の一辺の大きさ L は、粒子直径 d を長さの基本単位とすると、 $L/d = \sqrt{\pi N/\nu}/2$ となる。用いる粒子の直径はすべて等しく系は単分散であるとする。剛体相互作用のため衝突は瞬間的に起こり、2体衝突のみを考慮されている。今、2つの粒子 i, j がそれぞれ速度 \mathbf{v}_i と \mathbf{v}_j を持って衝突し、衝突後の速度が \mathbf{v}'_i と \mathbf{v}'_j になったとすると、非弾性剛体球の衝突則として以下のようにまとめることができる。

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \frac{1}{2}(1+r)[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]\mathbf{n} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \frac{1}{2}(1+r)[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]\mathbf{n}, \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{n} は、2粒子が衝突した時の粒子同士の中心を結ぶベクトルに平行な単位ベクトルで、衝突面に対して法線ベクトルとなっている。この衝突則を使うと運動量は保存するが、エネルギーは失われる。

系の大きさは、粒子数 N として25万から100万粒子まで、粒子占有率 ν は、0.25 ~ 0.75 と変化させ²、非平衡系に適用できる単純かつ汎用性があり高速な剛体球系 Event-Driven 分子動力学シミュレーションのアルゴリズム [5, 6] を使い、2次元周期境界条件の無重力下で計算を行った。

シミュレーションはすべて反発係数を $r=1$ に固定し初期緩和させ、系を熱平衡状態にさせた状態（分子カオス状態）より始めた。つまり初期状態は、空間的に一様な密度で分子速度は Maxwell-Boltzmann 分布に従っている。この初期状態をとる理由は、 $r=1$ において熱力学的にはエントロピー最大で、ボルツマンの H 関数は最小値をとっているため参照系として考えやすいという点があげられる。逆に、「自由冷却過程の粉体気体」モデルはこれらの熱力学的指標を用いて平衡安定状態からの逸脱を定量化できるし、ある特別な初期条件（熱平衡状態）から安定なアトラクター

² Alder 転移は2次元系の場合、 $\nu=0.70$ 付近で起こると言われている

状態への緩和過程を見るという観点から研究することも出来る。また、最終アトラクター状態の系統的研究により、不可逆過程や拡張された揺動散逸定理と応答理論など理論展開できる可能性を持っていると思われる。

最終アトラクター状態は、系の大きさ、密度を固定した場合、反発係数の違いにより、一様冷却、シア流、コラプスの3つの状態になることが、McNamara と Young[14] の 1024 粒子系の小規模シミュレーションにより報告されているが、システムサイズに根拠はなく空間相関長の見積もりもないため、最小相関がシステムサイズより大きくなる可能性が生じる。

反発係数に関する、一様冷却－シア流境界は、2次元粉体気体運動論により導出されている [15]。また、シア流－コラプス境界は、1次元系でのコラプスの理論により見積もられている [16, 17]³。ここでコラプスとは、非弾性コラプスと呼ばれている現象のことをさし、これは非弾性剛体球を使用する際にイベントドリブン型時間発展をさせることに起因する人工的な（病的）現象と現在では認識されており、具体的には有限時間に無限回の衝突を起こす。このためシミュレーションにおいて衝突時間が極めて小さくなるため、時間発展しなくなり丸め誤差の精度を越え破綻する。熱力学極限 ($N \rightarrow \infty$) では、これら反発係数の両境界はいずれも 1 に漸近する。つまり、熱力学極限系では、弾性剛体球系は理想気体としての極限系としてしか存在せず、どんなに小さな散逸でも系はたちまち不安定化する [1]。我々の予備的計算においても、これらの境界は低密度においては分子動力学シミュレーションの結果とよく一致することを確認している。

2.2 非平衡定常状態と熱浴

自由冷却過程の非弾性剛体球系では全運動エネルギーが単調に減少する。よって、系は外部からのエネルギーの注入によって定常状態に達する。運動エネルギーのゆらぎに対する定常状態を実現させるため、すべての粒子に全エネルギーが一定となるよう速度の大きさをスケールすることが提案されている [18, 19]。これは正準集合 (NVT アンサンブル) すなわち運動論的熱浴を設置した系をシミュレーションするために分子動力学法でよく行われている速度スケールリング法 [20] と等価である。この操作は、ランダム力型熱浴と異なり熱浴の影響が粒子の軌道に影響を与えず、粒子間衝突による散逸（反発係数）が非平衡度を特徴付ける単一の制御パラメーターになるという自由冷却過程の非弾性剛体球の特異な性質を保持している。また、速度を上記のようにスケールした系では、系の時間発展のモノサシを t からスケールした時間 t_s に変えることと等価である。

一方、平衡系 MD の熱浴法として運動論的温度と熱力学的温度が等分配されるという非ホロノミックな拘束条件に基づいたガウスの束縛法（ガウス型熱浴）と呼ばれる温度制御の方法が、Hoover らと Evans により提案されている [21, 22]。これは、ガウスの最小束縛原理に基づいて、全粒子の速度が一定となるように束縛力を付加する形になっている。速度スケールリング型熱浴とガウス型熱浴は、束縛型熱浴に分類され [23]、数値差分するため運動方程式に書き下した時、それらの差は $O(h)$ で一致することが示されている。（ここで h は数値積分の時間刻みを示す。）ところが剛体球極限では、イベントドリブン型で数値積分するため、時間刻み h は必要なく h はゼロと見なせる。つまり、速度スケールリング法とガウス熱浴は剛体球系という極限系では完全に等価な操作ということになる。結局、自由冷却過程の非弾性剛体球系の定常状態を実現するため、新しい時間スケール t_s を導入することは、剛体球系にガウス熱浴を設置することと等価になる。定常状態実現のために、ガウスの白色雑音（ランダム力）で一様に励起した系もまた研究されている。このタイプの熱浴法は、確率的熱浴法 (Stochastic Method) に分類され、粒子の速度ベクトルをスケールするだけでなく方向までも変えてしまう操作である。もちろん、MD におけるこれら一連の熱浴法と呼ばれている手法は、平衡系での速度分布関数がカノニカル分布になるという理由か

³ 1次元系の理論が使える理由は、2次元系でもコラプスはクラスター内部の直線状に並んだ粒子によって起こるというシミュレーション事実が発見されたため。

らテクニカルに使われているにすぎず、実際に熱浴を設置しているわけではないし、粉体系のような強い非平衡系で熱浴として機能するかどうかは保証の限りではない。実際、上記の非平衡散逸(粉体)粒子系で定常状態の速度分布関数や速度相関等が調べられた結果、系の動力学や統計的性質は熱浴の種類により非常にとても大きな影響をうけることが明らかになりつつある [24, 25, 26]。この事実は、平衡系で機能していた熱浴は、粉体系のような非線型非平衡系では機能しないことを強く示唆し、温度と熱浴の自然な拡張は何かを考える具体的な非平衡モデルとなっていると同時に、運動論的熱浴と熱力学的熱浴の関係を拡張した熱浴法の理論体系の整備ならびにシミュレーション手法の発展を促す典型的事例を提供していると思われる。

3 結果と考察

3.1 高密度系での最終アトラクター状態

最近、Mazenko ら [3, 4] は、マクロな流体力学方程式のレベルで、クラスター不安定性や最終アトラクター状態が議論している。彼等の理論は、圧力を計算する際、付加項を考え、系の最密充填密度以上になるとべき的に圧力が増大し、排除体積効果が生じることを現象論的に取り込んでいる。この“処置”を施すことにより、非弾性コラプスが回避でき計算効率を大幅に向上させ、高密度な領域でも流体力学的に扱えるという多くのメリットがあると主張している。彼等は、この方程式を使って系統的にパラメーターサーベイをした結果、最終アトラクター状態が、一様冷却(HCS)、シアバンド(Shear Band State: SBS)、2つの渦(2 Vortex State: 2VS)の3つとなると報告している。また、SBSと2VSとなる明確な規準はなく、初期条件のわずかな違いが最終状態を決定しているようだと言っている。2つの渦のモード(2VS)に関しては、McNamaraとYoungの1996年の論文において、高密度系で生じることが報告されている [14]。さらにSotoらは、現象論的な振幅方程式を使い、SBSと2VSのモードの理論解析を行っている [19]。

我々の以前の研究では、これまで最終状態のアトラクターは、低密度ではラミナーなSBS、振動するSBS、乱流的なSBS、高密度ではラミナーなSBSと2つの渦2VSのいずれかになることがシミュレーションの結果から得られていた。今回の大規模計算において、高レイノルズ数高密度系では、最終アトラクターがいくつかあり、今回新たに1つの渦になるモード(1 Vortex State: 1VS)が発見された。これは既存の現象論的方程式からも予測外の結果である。これらの結果から、ほとんど同じ反発係数でさえ、最終アトラクター状態に大きな違いをもたらすことがわかる。

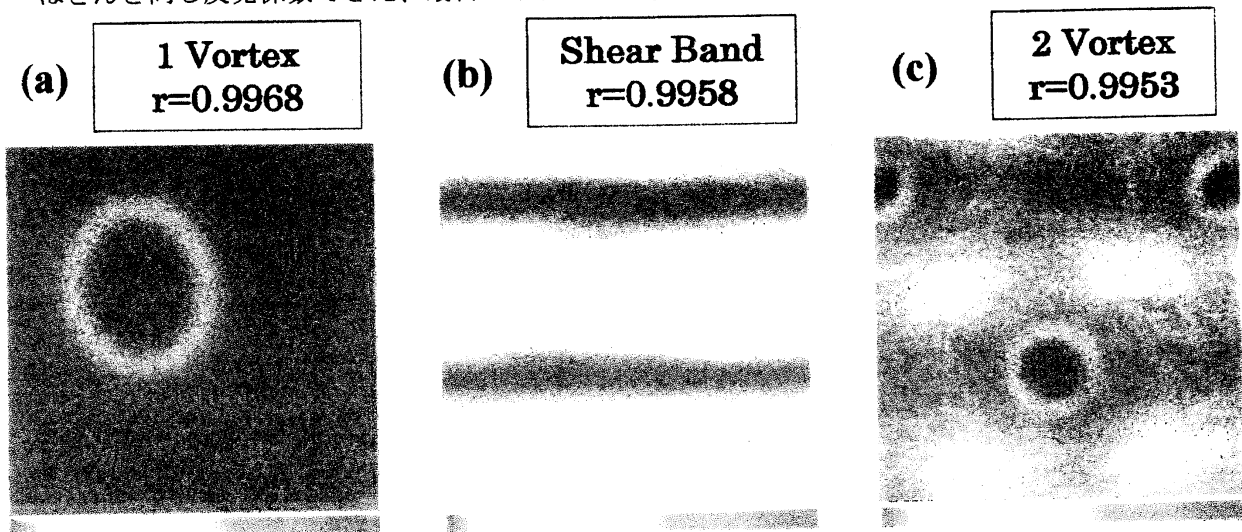


図 1: 26.2 万粒子 (512^2)、粒子占有率 $\nu = 0.75$ における最終アトラクター状態。(a) 反発係数 $r = 0.9968$, (b) $r = 0.9958$, (c) $r = 0.9953$ 。

高密度系においては、相関長がシステムサイズスケールを容易に越えてしまうため、何らかの縮退が起こっている可能性がある。実際、2次元流体乱流の分野では、凝縮状態 (Condensed State) と呼ばれる状態が認識されており、Review 論文 [7] においても1章をさいて紹介されている。これは、散逸スケール (コルモゴロフスケール) がシステムサイズより大きくなってしまった場合に凝縮状態という新しい現象が起こるということを指摘したものであり、1967年に Kraichnan により予測されている。彼はこの現象をアナロジーとして (名前として適切かどうか別にして)、2次元乱流の Bose-Einstein 凝縮と呼んでいる。このような観点からの粉体気体の研究は全くなされておらず、今後の研究の進展が待たれる。

3.2 エンストロフィー散逸率とエネルギースペクトル

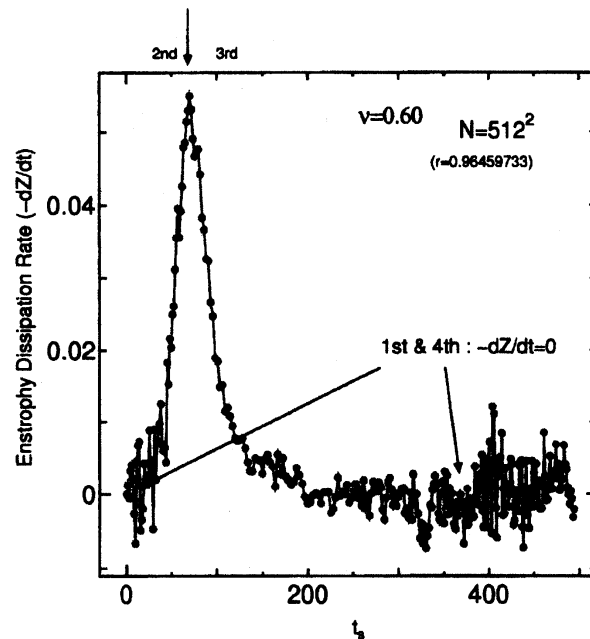


図 2: 典型的なエンストロフィー散逸率の時間発展。クラスター不安定性が生じる時間でエンストロフィーの散逸率は最大になる。パラメータは、 $(r, N, \nu) = (0.96459733, 512^2, 0.60)$ 。

図 2 は、エンストロフィー散逸率をスケールされた時間 t (すなわち、ガウス型熱浴を設置した) でプロットした時間発展の典型的挙動である。今回、シミュレーションを行ったすべての場合に関して、エンストロフィー散逸率がピークを持つ時刻でクラスター化が起こる、すなわちクラスター不安定性が生じる時間でエンストロフィーの散逸率は最大になることが判明した。よってこれが、シアリングークラスタリングステージを決定する明確な指標になる。

エネルギー&渦度スペクトルとは、それぞれ温度場、渦度場の空間パワースペクトルのことである。図 3 には、無次元化した波数 kd に対するエネルギースペクトル $E(k)$ の時間発展の様子を示している。初期状態から一様冷却状態 (1st Stage) では、フラットな分布をしているが、時間の経過とともに低波数側で徐々に温度場の相関が発達していき、クラスター不安定性が起こる瞬間にべき的な振る舞いをし、その指数が最大値をとることがわかる。また、指数は -3 に極めて近い値をとる (すなわち、Kraichnan らによる次元解析の理論予測と同じ発達した 2 次元乱流となる) ことがわかった。エネルギースペクトルが -3 を取る際、渦度スペクトルを計算したところ、指数は -1 となりこれも次元解析と一致した。

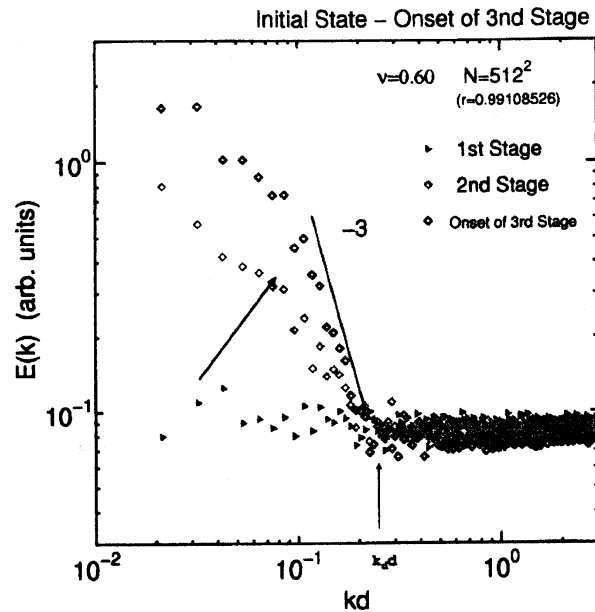


図 3: エネルギースペクトルの時間発展。クラスター不安定性が生じる時間でべき指数は理論予測と同じ -3 となる。パラメーターは、 $(r, N, \nu)=(0.99108526, 512^2, 0.60)$ 。

次に、温度場の空間相関長の最小波数スケール $k_d d$ に着目する。速度場などの特徴的な空間スケールは、解析的な議論から $1/\sqrt{1-r^2}$ で相関長が弾性極限で発散することが予測されているが、実際にシミュレーションにおいても図 4 に示すように、横軸を $kd/\sqrt{1-r^2}$ とすれば、粒子数や反発係数の値によらずスケールすることができる。また、 r が弾性極限に近いとき、べき的な領域が増大することが確認できたため、低～中程度の密度領域では弾性極限で流体乱流の性質がよりはっきりと現れ高レイノルズ数状態になるということが言える。一方、密度の変化に関しては、平衡系で固相に近い高密度になると最小相関長自体がはっきり定義できなくなった。高密度系に関するエネルギースペクトルに関しては、今後の課題とする。

4 まとめ

2次元 IHS モデルの発達した乱流状態におけるエネルギースペクトルのスケーリング指数や最小温度スケールの系統的な評価により、低密度系準弾性極限においてはクラスター不安定性以前のステージは、発達した 2次元非圧縮性 NS 乱流のエンストロフィーカスケードと同様の現象が起こっていることを示している。また、高密度系の最終アトラクター状態のシミュレーション結果は、2次元乱流における Bose-Einstein 凝縮との関係もほのめかしている。これらの結果から、2次元 IHS モデルは、2次元乱流の概念を使って部分的に理解できる可能性があることを強く示唆していると結論付けることができる。

特に高レイノルズ数（準弾性極限）高密度系での最終アトラクター状態は、ミクロスケールの解析手法でしかアプローチすることが困難であるため、系統的なシミュレーションを行うことにより、そこからの理論展開が望める可能性が生じると思われる。より精密な理論を構築するためのデータの蓄積には、高レイノルズ数で発達した乱流を再現し相関長が大きな大規模計算をすることが必要である。

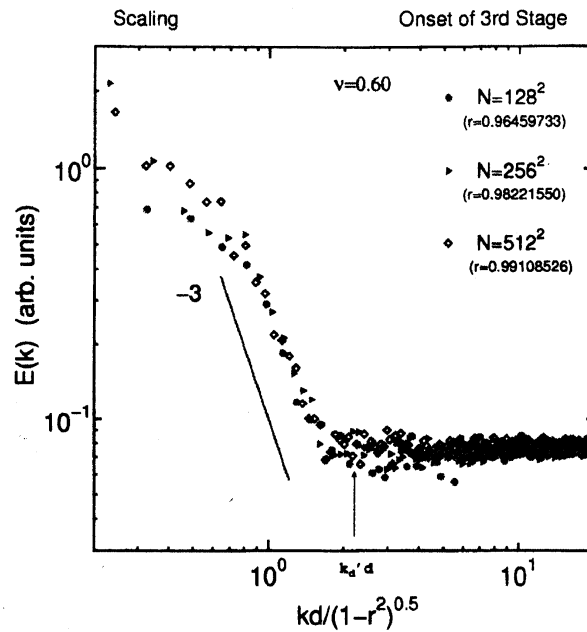


図 4: 粒子占有率を $\nu = 0.60$ に固定した場合の様々な粒子数と反発係数を変化させエネルギースペクトルを反発係数の関数によるスケーリングを行った。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金 若手研究 (B)「微小重力環境下での粉体系における乱流化現象とその統計則の解明」の援助を受けてます。また、計算の一部は、東京大学物性研究所スーパーコンピュータシステムを利用しておこなわれました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] T. Pöschel and S. Luding (Eds.), *Granular Gas* (Lecture Notes in Physics, 564), Springer (2001).; T. Pöschel and N. Brilliantov (Eds.), *Granular Gas Dynamics* (Lecture Notes in Physics, 624), Springer (2003).; N. Brilliantov and T. Pöschel, *Kinetic Theory of Granular Gases*, Oxford University Press (2004).; T. Pöschel and T. Schwager, *Computational Granular Dynamics*, Springer (2004).
- [2] I. Goldhirsch, *Rapid Granular Flows*, Annu. Rev. Fluid. Mech. **35**, 267 (2003).
- [3] S. A. Hill and G. F. Mazenko, Phys. Rev. E **63**, 031303 (2001).; Phys. Rev. E **67**, 061302 (2003).
- [4] S. Marakani and G. F. Mazenko, cond-mat/0406572.
- [5] 磯部雅晴, 物性研究, **72**, 21 (1999).
- [6] M. Isobe, Int. J. Mod. Phys. C **10**, 1281 (1999).
- [7] P. Tabeling, *Two-dimensional turbulence: a physicist approach*, Phys. Rep. **362**, pp.1-62 (2002).

- [8] Y. -h. Taguchi, *Europhys. Lett.* **24**, 203 (1993).
- [9] G. Peng and T. Ohta, *Phys. Rev. E* **58**, 4737 (1998).
- [10] F. Radjai and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 064302 (2002).
- [11] M. Isobe, *Phys. Rev. E* **68**, 040301(R) (2003).
- [12] 磯部雅晴, 第13回統計物理学研究会研究報告書 pp.79-100 (2003).
- [13] T. P. C. van Noije and M. H. Ernst, *Phys. Rev. E* **61**, 1765-1782 (2000).
- [14] S. McNamara and W. R. Young, *Phys. Rev. E* **53**, 5089 (1996).
- [15] J. T. Jenkins and M. W. Richman, *Phys. Fluids* **28**, 3485 (1985).
- [16] B. Bernu and R. Mazighi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 5745 (1990).
- [17] S. McNamara and W. R. Young, *Phys. Fluids A* **4**, 496 (1992).
- [18] T. S. Komatsu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 5 (2000).
- [19] R. Soto, M. Mareschal, and M. M. Monsour, *Phys. Rev. E* **62**, 3836 (2000).
- [20] L. V. Woodcock, *Chem. Phys. Lett.* **10**, 257 (1971).
- [21] W. G. Hoover, A. J. C. Ladd, and B. Moran, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1818 (1982).
- [22] D. J. Evans, *J. Chem. Phys.* **78**, 3297 (1983).
- [23] S. Nosé, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **103**, 1 (1991).
- [24] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **60** 4340 (1999).
- [25] J. M. Montanero and A. Santos, *Granular Matter* **2**, 53 (2000).
- [26] M. H. Ernst and R. Brito, *Phys. Rev. E* **65**, 040301 (2002).